# СУБПОЛОСНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ МАЛОРАЗМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ ПРИ ЗОНДИРОВАНИИ ВОЗДУШНОГО ПРОСТРАНСТВА СВЕРХКОРОТКИМИ РАДИОИМПУЛЬСАМИ

**Рассматривается возможность обеспечения безопасности полетов летательных аппаратов, типа вертолетов, на малых высотах, где существует большая вероятность несанкционированного появления малоразмерных объектов типа беспилотных летательных аппаратов. Рассмотрена возможность решения задачи обнаружения таких объектов на основе радиолокационных зондирований в резонансной области частот UHF диапазона радиоволн. Предложена субполосная обработка принимаемых сигналов, на основе разбиения области определений спектров на субполосы, для адаптации к частотной полосе отклика и фильтрации шумов. Разработан математический аппарат субполосного анализа сигналов с использованием субполосных матриц. Получено оптимальное решение задачи фильтрации откликов в заданных субполосах. Приводится процедура обработки принимаемых сигналов, при принятии решений о наличии отклика в заданной субполосе. Приводятся оценки вероятностей ошибочных решений при заданной вероятности ошибок первого рода.**

**Ключевые слова: обеспечение безопасности полетов; малоразмерные летательные аппараты; субполосная обработка; спектр, полоса частот, частотный интервал; анализ; фильтрация; субполосная матрица; отклик; многочастотное зондирование.**

## 1. Введение

В настоящее время обеспечение безопасности полетов является актуальным. Особенно при полетах на малых высотах. Существующие бортовые оптические и радиолокационные средства не всегда эффективны. Это объясняется тем, что крупные воздушные и наземные объекты, такие как самолеты, вертолеты, высотные мачты, опоры линий электропередач и высокие строения достаточно хорошо обнаруживаются как в оптическом, так и радиолокационном диапазонах. При обнаружении малоразмерных воздушных объектов, например, таких как беспилотные летательные аппараты (БПЛА), возникают проблемы. В настоящее время малоразмерные БПЛА получили широкое распространение, причем их совершенствование идет по пути уменьшения размеров и расширения спектра выполняемых задач. Следовательно, такие объекты могут создавать угрозу безопасности полетов, особенно на малых высотах, где вероятность их несанкционированного появления достаточно высока.

Линейные размеры малоразмерных БПЛА (например, типа «коптер») довольно малы и могут составлять всего два десятка сантиметров, а в элементах конструкции используются композитные материалы, снижающие радиолокационную заметность. Применение средств оптического и инфракрасного диапазона далеко не всегда позволяет получить необходимый результат. Это определяется зависимостью их от погодных условий, времени суток и очень слабой тепловой контрастностью объектов [1].

Существующие бортовые радиолокационные средства, в том числе и вертолетные, функционируют в «квазиоптической» области частот (когда длина волны, порядка 3 см, существенно меньше линейных размеров объектов). При этом, основная особенность при отражении радиоволн, состоит в том, что эффективная поверхность рассеяния (ЭПР) малоразмерных объектов очень мала (составляет порядка 0,001 – 0,05 м$^2$) [1]. Следовательно, дальность обнаружения малоразмерных БПЛА ограничивается мощностными (энергетическими) характеристиками радиолокационных средств и на сегодняшний день не превышает единиц километров (да и то практически в идеальных условиях). При этом, в основном используются методы, основанные на эффекте Доплера (проявляется при наличии радиальной скорости объекта за счет изменения частоты сигнала при отражении). Однако большая часть малоразмерных БПЛА мало скоростные, или вообще могут быть практически неподвижны (зависать). Кроме этого, высота полета таких объектов небольшая, как правило не превышает сотен метров. В этих условиях обнаружение и распознавание необходимо проводить на фоне подстилающей поверхности. При этом, в разрешаемом объеме радиолокатора возникают отражения не только от самого объекта, но и от подстилающей поверхности (земли) и возможно от других посторонних объектов. Удельная ЭПР подстилающей поверхности, в данном диапазоне радиоволн, может достигать 0,1 м$^2$. В этом случае земля является пассивной помехой, а отношение сигнал/помеха в отраженном сигнале может достигать до минус 10 – 15 дБ по мощности (даже для локаторов с хорошими разрешающими способностями) [1]. Для решения перечисленных выше проблем требуются новые подходы и методы обработки радиолокационной информации, а также использования других диапазонов радиоволн где отражения от малоразмерных БПЛА будут более информативными.

Для обнаружения и распознавания малоразмерных БПЛА необходимо использовать диапазон радиоволн, в котором наиболее полно проявляются отражающие свойства таких объектов и где гораздо менее выражены отражения от пассивных помех, в данном случае отражения от подстилающей поверхности. Наиболее приемлемым является UHF диапазон радиоволн. Это объясняется тем, что в этом диапазоне проявляются «резонансные» свойства при отражении сигналов. Отдельные элементы конструкций малоразмерных БПЛА способны формировать отклики на электромагнитное воздействие [2]. Особенно это проявляется в тех случаях, когда длина волны соизмерима или кратная линейным размерам элементов конструкции таких объектов. Априори неизвестны размеры способных к реакциям элементов конструкции. Следовательно, нельзя заранее определить частоту зондирующего воздействия. В качестве выхода из такой ситуации, естественно, использовать многочастотное широкополосное зондирование [3]. Для этого возможно использовать линейно частотно модулированные (ЛЧМ) сигналы с широкой полосой, либо сверхкороткие гладкие импульсы. Воздействие ЛЧМ широкополосных сигналов эквивалентно использованию коротких радиоимпульсов определенной частоты. Синтезирование таких сигналов возможно с использованием цифровых методов [4].

Для обеспечения широкополосности, дискреты ЛЧМ сигнала должны быть достаточно короткими по длительности. Однако кратковременное воздействие не всегда может породить резонансный отклик, поэтому возникающая реакция соответствует понятию импульсной характеристики некоторой системы. Длительность реакции зависит от ширины полосы фильтра отклика, которую необходимо оценивать, чтобы в достаточной мере использовать энергетические свойства отражений [5].

Относительно малая подвижность БПЛА позволяет использовать когерентные свойства сигналов [6], то есть проводить накопление отраженных от объектов сигналов. Это может обеспечить необходимые энергетические характеристики для обнаружения на больших дальностях и с приемлемыми показателями качества.

Еще один важный аспект заключается в том, что кроме отклика в определенном частотном диапазоне в принимаемом сигнале, будут присутствовать и посторонние шумы. Поэтому, для надежного обнаружения отклика необходимо использовать приемы снижения их влияния. В качестве такого приема в статье предлагается использовать субполосную обработку, то есть анализ свойств принимаемых сигналов с позиций разбиения частотной полосы на субполосы [7]. Для этого в статье разработан специальный математический аппарат и методы его применения.

## Основная часть

### 1. Математические основы субполосного анализа сигналов

Пусть далее символ $x(t), t \in (0,T)$ означает некоторый сигнал конечной длительности, трансформанта Фурье которого определяется следующим соотношением [8]

$$X(\omega) = \int_0^T x(t) \exp(-j\omega t)\, dt. \qquad (1)$$

Областью определения трансформанты (спектра Фурье) является вся числовая ось и предполагается выполнения условий [9] существования частотного представления исходного сигнала в области оригиналов (обратное преобразование Фурье)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t)\, d\omega/2\pi, \qquad (2)$$

и справедливости равенства Парсеваля

$$\|x\|^2 = \int_0^T x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega/2\pi \qquad (3)$$

Если область определения спектра разбить на симметричные субполосы вида

$$\Omega_r = [-\Omega_{2r}, -\Omega_{1r}) \cup [\Omega_{1r}, \Omega_{2r}),$$
$$\Omega_{11} = 0, \Omega_{2,(r-1)} = \Omega_{1r}, r = 2, 3, \cdots, \qquad (4)$$

где индекс $r$ означает номер частотного интервала, то равенству Парсеваля можно придать следующий вид

$$\|x\|^2 = \sum_{r=1}^{\infty} P_r(x), \qquad (5)$$

где

$$P_r(x) = \int_{z \in \Omega_r} |X(z)|^2 dz/2\pi. \qquad (6)$$

Представляется естественным характеристики вида (6) называть субполосными частями энергии сигнала. Ясно, что определение этих характеристик относится к приемам субполосного анализа [7].

Важно, что реализуемость таких вычислений доступно непосредственно в области определения сигналов (области оригиналов). Этот вывод нетрудно обосновать подстановкой представления (1) в определение (6). В результате несложных преобразований получаем квадратичную форму

$$P_r(x) = \int_0^T \int_0^T A_r(t_1 - t_2) x(t_1) x(t_2) dt_1 dt_2, \qquad (7)$$

ядро которого определяется субполосным интегралом

$$A_r(t) = \int_{z \in \Omega_r} \exp(-jzt) dz/2\pi. \qquad (8)$$

После интегрирования отсюда имеем

$$A_r(t) = (\sin(\Omega_{2r} t) - \sin(\Omega_{1r} t))/\pi t,$$
$$A_r(0) = (\Omega_{2r} - \Omega_{1r})/\pi. \qquad (9)$$

Ядра вида (8) будем называть субполосными ядрами. Именно они служат основой развиваемого в статье математического аппарата субполосного анализа.

Кроме вычисления субполосных частей энергий сигналов представляет интерес выделение их субполосных аддитивных компонент

$$x(t) = y_r(t) + \varepsilon_r(t), t \in (0, T), \qquad (10)$$

которые однозначно определяются на основе следующего требования к спектру искомой компоненты

$$Y_r(\omega) = \int_0^T y_r(t) \exp(-j\omega t) dt, \qquad (11)$$

а именно

$$Y_r(\omega) = X(\omega), \omega \in \Omega_r, \qquad (12)$$
$$Y_r(\omega) \equiv 0, \omega \notin \Omega_r. \qquad (13)$$

Ясно, что требования (12) и (13) при конечной длительности компонент сигнала не могут быть выполнены, но можно ввести функционал, который определяет субполосную меру погрешности их выполнения на пространстве сигналов исходной длительности

$$S_r(y) = P_r(x - y) + \|x\|^2 - P_r(y). \qquad (14)$$

Видно, что первое слагаемое является мерой погрешности выполнения требования (12), тогда как два других с учетом равенства (3) определяют меру погрешности отклонения от нуля квадрата модуля спектра искомой компоненты (требование (13)). Поэтому естественным принципом служит вариационное условие минимизации меры погрешности на пространстве сигналов исходной длительности с ограниченной энергией

$$S_r(y_r) = \min S_r(y), y(t) \in L_2(T). \qquad (15)$$

Опуская подробности, приведем решение вариационной задачи (15)

$$y_r(t) = \int_0^t A_r(t - \tau) x(\tau) d\tau. \qquad (16)$$

Таким образом и в этом случае определяющее значение имеют субполосные ядра.

Отметим еще одну важную особенность получаемых на основе представления (16) компонент исходных сигналов. Если в (16) подставить представление (8), то после очевидных преобразований с учетом определения (1) нетрудно получить следующее соотношение

$$y_r(t) = \int_{\omega \in \Omega_r} X(\omega) \exp(j\omega t)\, d\omega/2\pi. \qquad (17)$$

Оно показывает, что компонента вида (16) полностью определяется отрезком спектра исходного сигнала в исходной субполосе. Это очень важное свойство, которое не достигается при использовании любого другого фильтра.

Кроме того, в отличие от других методов фильтрации выполняется свойство аддитивности $\sum_{r=1}^{\infty} y_r(t) = x(t)$. Оно следует непосредственно из определения субполосных ядер.

## 2. Вычислительные аспекты субполосного анализа

Реализация вычислений интегралов (8) и

(16) с применением компьютерных технологий предполагает использование квадратурных формул. Со многих точек зрения представляется приемлемым осуществлять эквидистантную дискретизацию областей интегрирования (областей определения сигналов) и использовать квадратурную формулу прямоугольников, так что аналогами (8) и (16) являются

$$P_r(\vec{x}) \cong \vec{x}' A_r \vec{x}, \quad (18)$$

$$\vec{y}_r = A_r \vec{x}, \quad (19)$$

где верхний штрих означает транспонирование:

$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_N)'$; $x_k = x(k\Delta t)$; $k = 1, \cdots, N$;

$\vec{y}_r = (y_{1r}, \cdots, y_{Nr})'$; $y_{kr} = y_r(k\Delta t)$; $k = 1, \cdots, N$

$A_r = \{a_{ik}^r\}$;

$$a_{ik}^r = \frac{\sin(V_{2r}(i-k)) - \sin(V_{1r}(i-k))}{\pi(i-k)}, \; a_{ii}^r = \frac{V_{2r} - V_{1r}}{\pi}; \quad (20)$$

$$V_{mr} = \Delta t \Omega_{mr}; m = 1, 2; \quad (21)$$

где:

$\Delta t = T/N$ – шаг дискретизации.

Представляется, что использование одинаковых символов для обозначения дискретных аналогов субполосных ядер (субполосные матрицы) и сигналов не приводит к искажению сути.

Шаг дискретизации должен быть достаточно мал в смысле выполнения неравенств

$$\varepsilon_G = 1 - \int_0^T \int_0^T A_G(t_1 - t_2) x(t_1) x(t_2) dt_1 dt_2 / \|x\|^2 \ll 1,$$

где $G$ – интервал круговых частот, удовлетворяющий условию

$$G\Delta t = (-\pi, \pi). \quad (22)$$

Произведение в левой части (22) принято называть областью нормированных круговых частот, определяющей период изменений спектра вектора отсчетов (сохраняя обозначения):

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^N x_k \exp(j\omega k); \; -\pi \leq \omega \leq \pi. \quad (23)$$

Ясно, что при ограниченности области определения спектра дискретизованного сигнала образуется только конечное количество субполос, которые полностью покрывают область (22). В условиях неопределенности относительно свойств реагирующих на зондирование элементов конструкции МБПЛА представляется естественным разбиение этой области следующим образом (вводится нулевая субполоса)

$V_{01} = 0$; $V_{02} = \Delta V/2$; $\Delta V = V_{2r} - V_{1r} = const$;

$$r = 1, \cdots, R; \quad (24)$$

$$\Delta V(2R + 1) = 2\pi. \quad (25)$$

Легко показать, что тогда в соответствии с (20) субполосные матрицы можно представить в следующем виде

$$A_r = C_r A_0 C_r + S_r A_0 S_r, \quad (26)$$

где

$A_0 = \{a_{ik}^0\}$;

$$a_{ik}^0 = \frac{\sin(\Delta V(i-k)/2)}{\pi(i-k)}; \; a_{ik}^0 = \frac{\Delta V}{2\pi}; i = 1, \cdots, N; \quad (27)$$

$$C_r = \mathrm{diag}(\cos(\omega_r), \cdots, \cos(\omega_r N)); \quad S_r = \mathrm{diag}(\sin(\omega_r), \cdots, \sin(\omega_r N)); \quad (28)$$

$$\omega_r = r\Delta V; r = 0, \cdots, R. \quad (29)$$

Ввиду симметричности матриц $A_r$ и их положительной определенности (следует из положительности субполосных частей энергий сигналов конечной длительности) они являются матрицами простой структуры и их собственные числа положительны [10]. Вычислительные эксперименты, однако, показывают, что только определяемая следующим соотношением (квадратная скобка означает целую часть числа)

$$J_0 = [N\Delta V/2\pi] + 2, \quad (30)$$

часть собственных чисел нулевой субполосной матрицы значимо отличны от нуля. Поэтому для нее достаточно точно выполняется соотношение

$$A_0 = Q_0 L_0 Q'_{0}, \quad (31)$$

где $L_0$ – диагональная матрица ненулевых собственных чисел

$$L_0 = \mathrm{diag}(\lambda_1^0, \cdots, \lambda_{J_0}^0); \quad (32)$$

$Q_0$ – матрица соответствующих ненулевым собственным числам собственных векторов

$$A_0 Q_0 = Q_0 L_0. \quad (33)$$

На основе определения нулевой субполосной матрицы можно доказать справедливость неравенства для собственных чисел [11]

$$1 \geq \lambda_1^0 \geq \cdots \geq \lambda_{J_0}^0 > 0. \quad (34)$$

В свою очередь, используя представление (26), можно доказать справедливость следующих соотношений для собственных чисел субполосных матриц других субполос.

$$\lambda_{2k-1}^r = \lambda_{2k}^r = \lambda_k^0; k = 1, \cdots, J_0. \quad (35)$$

Для матриц собственных векторов, соответствующих собственным числам с нечетными и четными индексами справедливы представления [12]

$$Q_r^c = C_r Q_0; \quad Q_r^s = S_r Q_0. \quad (36)$$

Отметим, что общую матрицу собственных чисел целесообразно составить имея в виду порядок, определяемый индексами в (35). Тогда соответствующие собственные векторы в общей матрице будут перемежаться тоже в этом же порядке.

Легко показать, что подстановка (26) в (18) и (19) дает соответствующие представления через проекции исходного вектора на собственные векторы субполосных матриц

$$P_r(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{J_0} \lambda_k^0 (\alpha_{kr}^2 + \beta_{kr}^2); \tag{37}$$

$$\vec{y}_r = \vec{y}_{cr} + \vec{y}_{sr}; \tag{38}$$

$$\vec{y}_{cr} = C_r Q_0 L_0 \vec{\alpha}_r; \quad \vec{y}_{sr} = C_r Q_0 L_0 \vec{\beta}_r; \tag{39}$$

$$\vec{\alpha}_r = (\alpha_{1r}, \cdots, \alpha_{J_0 r})' = Q'_0 C_r \vec{x}; \quad \vec{\beta}_r = (\beta_{1r}, \cdots, \beta_{J_0 r})' = Q'_0 S_r \vec{x}. \tag{40}$$

Очевидно, что эти соотношения показывают возможность эффективного распараллеливания вычислений этих субполосных характеристик.

Представляет интерес оценка требуемой размерности используемых субполосных матриц. Для этого в качестве меры отличия спектров исходного и получаемого на основе соотношения (19) векторов воспользуемся понятием субполосной части энергии их разности, которая после очевидных преобразований принимает следующий вид

$$P_r(\vec{x} - \vec{y}_r) \sum_{k=1}^{J_0} \lambda_k^0 (1 - \lambda_k^0)^2 (\alpha_{kr}^2 + \beta_{kr}^2) = = (1 - \lambda_{mean}^0)^2 P_r. \tag{41}$$

Здесь имеется в виду, что ввиду положительности множителей в представлении слагаемых всегда найдется некоторое среднее значение любого из них, позволяющее выразить сумму в таком виде (теорема о среднем). В данном случае множитель перед субполосной частью энергии можно интерпретировать в качестве относительной погрешности. В виду неравенства (34) его значение будет меньше единицы.

Чтобы вектор (19) в достаточной мере отражал свойства отрезка трансформанты Фурье исходных данных необходимо обеспечить близость к нулю правой части (41). Ясно, что это достигается тогда, когда максимальные проекции на собственные векторы соответствуют наибольшим собственным числам, а сами собственные числа близки к единице. Вычислительные эксперименты показывают, что количество достаточно близких к единице собственных чисел определяется соотношением

$$I_0 = J_0 - 3. \tag{42}$$

Так как должна обеспечиваться положительность правой части (42), то имея в виду (30) получаем требование для количества отсчетов

$$N \geq 4\pi/\Delta V = 2\nu_d/\Delta\nu, \tag{43}$$

где справа имеются в виду частота дискретизации

$$\nu_d = 1/\Delta t; \tag{44}$$

и ширина исходных субполос в частотной области

$$\Delta\nu = \Delta V/2\pi. \tag{45}$$

Легко показать, что при этом длительность обрабатываемой непрерывной реализации должна удовлетворять неравенству

$$T = N\Delta t \geq 2/\Delta\nu. \tag{46}$$

## 3. Решающая процедура субполосного обнаружения откликов

Предполагается, что после некоторой задержки по отношению к зондированию короткими импульсами на выходе приемника осуществляется регистрация вектора отсчетов сигнала $\vec{x}$ размерности $N$. Необходимо принять решение относительно справедливости следующей начальной гипотезы [13].

$H_9$: компоненты вектора $\vec{x}$ порождены в отсутствие откликов от МБПЛА.

$$\vec{x} \equiv \vec{u} = (u_1, \cdots, u_N)^T, \tag{47}$$

где $u_i, i = 1, \cdots, N$ – отсчеты некоторого центрированного шума с некоррелированными отсчетами ($E$ – символ математического ожидания)

$$E[u_i u_{i+\tau}] = \sigma_u^2, \tau = 0; \quad E[u_i u_{i+\tau}] = 0, \tau \neq 0; \tag{48}$$

В простейшем случае формулировка противоположной гипотезы имеет вид.

$H_1 = \overline{H}_0$: компоненты вектора $\vec{x}$ зарегистрированы в присутствии отклика

$\vec{w}_r = (w_{1r}, \cdots, w_{Nr})'$ от МБПЛА в некоторой заранее неизвестной субполосе из сформированного ранее их набора, то есть

$$x_i = w_{ir} + u_i, i = 1, \cdots, N. \tag{49}$$

Субполосная проверка справедливости начальной гипотезы должна осуществляться как обнаружение возможного отклика в каждой из субполос.

В качестве признаков предлагается использовать компоненты векторов вида (40). Имея в виду (47), при выполнении начальной гипотезы имеет место

$$\vec{\alpha}_r^x = \vec{\alpha}_r^u = Q'_0 C_r \vec{u}; \quad \vec{\beta}_r^x = \vec{\beta}_r^u = Q'_0 S_r \vec{u}. \tag{50}$$

Сопоставление этих соотношений с определениями (28) входящих в них матриц показывает, что реализуется квадратурная обработка, в которой роль фильтра играет матрица собственных векторов нулевой субполосной матрицы.

Центрированность и свойство некоррелированности (48) шума, а также равенство единице евклидовых норм собственных векторов нулевой субплолосной матрицы позволяют получить следующие соотношения для числовых характеристик компонент векторов (50)

$$E[\vec{\alpha}_r^u] = E[\vec{\beta}_r^u] = 0; m = 1,\cdots,J_0; \quad (51)$$

$$s_{mr}^{\alpha 2} = E[(\alpha_{mr}^2)^2] = \sigma_u^2/2 + +\sigma_u^2 \sum_{k=1}^N \cos(2\omega_r k) q_{km}^2/2; \quad (52)$$

$$s_{mr}^{\beta 2} = E[(\beta_{mr}^2)^2] = \sigma_u^2/2 - -\sigma_u^2 \sum_{k=1}^N \cos(2\omega_r k) q_{km}^2/2. \quad (53)$$

Из этих соотношений следует очевидные равенства

$$E[(\vec{\alpha}_{mr}^u)^2] + E\left[\left(\vec{\beta}_{mr}^u\right)^2\right] = \sigma_u^2. \quad (54)$$

Ясно, что среди собственных векторов нулевой матрицы найдется такой, на котором достигается минимум дисперсии проекции. Это обстоятельство и соотношение (54) говорит в пользу использования в качестве признакового пространства обнаружения откликов квадратурных компонент по отдельности.

В условиях справедливости противоположной гипотезы (49) квадратурные компоненты проекций на собственные векторы определяются следующими соотношениями

$$\vec{\alpha}_r^x = \vec{\alpha}_r^w + \vec{\alpha}_r^u = Q'_0 C_r(\vec{w} + \vec{u}); \quad (55)$$

$$\vec{\beta}_r^x = \vec{\beta}_r^w + \vec{\beta}_r^u = Q'_0 S_r(\vec{w} + \vec{u}). \quad (56)$$

Нетрудно также с учетом (51) получить соотношения для математических ожиданий этих векторов

$$\vec{e}_r^{\alpha} = \left(e_{1r}^{\alpha},\cdots,e_{J_0 r}^{\alpha}\right)' = E[\vec{\alpha}_r^x] = E[\vec{\alpha}_r^w]; \quad (57)$$

$$\vec{e}_r^{\beta} = \left(e_{1r}^{\beta},\cdots,e_{J_0 r}^{\beta}\right)' = E\left[\vec{\beta}_r^x\right] = E\left[\vec{\beta}_r^w\right]. \quad (58)$$

В предположении стационарности откликов в течении некоторого времени осуществления большого количества зондирований значений в смысле сохранения значений компонент векторов (57) и (58), для уменьшения дисперсий компонент вторых слагаемых в (55) и (56) целесообразно осуществить усреднение получаемых проекций, получая оценки векторов математических ожиданий

$$\hat{\vec{e}}_r^{\alpha} = \sum_{n=1}^k \vec{\alpha}_r^x(n)/K, \quad (59)$$

$$\hat{\vec{e}}_r^{\beta} = \sum_{n=1}^k \vec{\beta}_r^x(n)/K. \quad (60)$$

Здесь аргумент в круглых скобках означает акт зондирования.

Важно то, что если от зондирования к зондированию слагаемые в (59) и (60) некоррелированы, то дисперсии их шумовых компонент по сравнению с (52) и (53) уменьшатся в $K$ раз

$$d_{mr}^{\alpha 2} = s_{mr}^{\alpha 2}/K; \quad d_{mr}^{\beta 2} = s_{mr}^{\beta 2}/K. \quad (61)$$

При проверке справедливости начальной гипотезы используем следующее решающее правило: гипотеза об отсутствии отклика в проверяемой субполосе отвергается, если выполняется хотя бы одно из следующих неравенств

$$|\hat{e}_{mr}^{\alpha}| \geq h_{mr}^{\alpha}, m = 1,\cdots,J_0; \quad (62)$$

$$\left|\hat{e}_{mr}^{\beta}\right| \geq h_{mr}^{\beta}, m = 1,\cdots,J_0. \quad (63)$$

где $h_{mr}^{\alpha}$ и $h_{mr}^{\beta}, m = 1,\cdots,J_0$ – некоторые пороги, которые определяются в процессе обучения при заведомом отсутствии откликов.

Процесс обучения реализуется на основе заданной вероятности $\alpha$ ошибок первого рода (ложных тревог). Она определяет необходимое количество $M$ повторений процедур усреднений вида (59) и (60) (здесь квадратная скобка – целая часть числа) при заведомом отсутствии откликов

$$M = [1/\alpha] + 1. \quad (64)$$

При отсутствии откликов пороги определяются из условия

$$h_{mr}^{\alpha} = \max\left|\sum_{k=1}^N \cos(\omega_r k) q_{km}(k) \bar{u}_k^i\right|, \quad (65)$$

где $i = 1,\cdots,M$.

$$h_{mr}^{\beta} = \max\left|\sum_{k=1}^N \sin(\omega_r k) q_{km}(k) \bar{u}_k^i(i)\right|, \quad (66)$$

где $i = 1,\cdots,M$.

Здесь символ $\bar{u}_k^i$ означает компоненту получаемого при $i$-ом усреднении вектора шума (см. (59)и (60))

$$\bar{u}_k^i = \sum_{n=1}^K u_k^i(n)/K. \quad (67)$$

Здесь снова символ $n$ в скобках означает номер зондирования при образовании сумм вида (59) и (60). Таким образом, усреднение сводится к усреднению векторов шума.

Представляет интерес оценка вероятности ошибок второго рода (пропуск цели) [13]. Для этого предположим, что шумы имеют гауссовское распределение. Тогда соотношения для вероятностей ошибок второго рода при обнаружении откликов имеют вид

$$p_{mr}^{\alpha} = F((h_{mr}^{\alpha} + |e_{mr}^{\alpha}|)/d_{mr}^{\alpha} + +F\,(h_{mr}^{\alpha} - |e_{mr}^{\alpha}|)/d_{mr}^{\alpha}) - 1; \quad (68)$$

$$p_{mr}^{\beta} = F\left(\left(h_{mr}^{\beta} + \left|e_{mr}^{\beta}\right|\right)/d_{mr}^{\beta} + +F\left(h_{mr}^{\beta} - \left|e_{mr}^{\beta}\right|\right)/d_{mr}^{\beta}\right) - 1. \quad (69)$$

Здесь имеется в виду интеграл вероятности для Гауссового распределения [13]

$$F(c) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{c} \exp(-x^2/2)dx. \qquad (70)$$

Эти соотношения показывают, что для достижения вероятности правильного обнаружения порядка 0,98 при вероятности ошибки первого рода порядка 0,0001 должно выполняться хотя бы одно из следующих неравенств

$$|e_{mr}^{\alpha}| > 2d_{rm}^{\alpha}. \qquad (71)$$

## 3. Выводы

В рамках данной статьи рассмотрена актуальная задача радиолокационного обнаружения малоразмерных БПЛА для обеспечения безопасности полетов авиационных средств на малых высотах. Рассмотрены условиях реакции на зондирование только отдельных частей конструкций малоразмерных БПЛА, неизвестных заранее размеров. В этих условиях отклики на зондирование формируются на основе резонансов в неизвестной заранее полосе частот. Поэтому целесообразно использовать зондирование широкополосными сигналами, например, многочастотными в виде ЛЧМ с цифровым формированием.

Важнейшее значение приобретает субполосная обработка принимаемых сигналов, которая реализуется на основе разбиения области определений спектров на субполосы, именно так можно произвести адаптацию к частотной полосе отклика от малоразмерных объектов и осуществить фильтрацию шумов.

В статье изложены элементы математического аппарата субполосного анализа сигналов в виде субполосных матриц и их собственных чисел, и векторов. Введено понятие субполосных частей энергий сигналов и получено оптимальное в смысле минимизации субполосной меры квадратической погрешности приближений решение задачи фильтрации откликов в заданных субполосах.

Разработана процедура обработки принимаемых сигналов при принятии решений о наличии отклика в заданной субполосе и дана оценка вероятностей ошибочных решений при заданной вероятности ошибок первого рода.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Макаренко С. И., Тимошенко А. В., Васильченко А. С. Анализ средств и способов противодействия беспилотным летательным аппаратам. Часть 1. Беспилотный летательный аппарат как объект обнаружения и поражения // Системы управления, связи и безопасности, № 1 (2020), с. 109 – 146 http://sccs.intelgr.com/archive/2020-01/05-Makarenko.pdf
2. Современная радиолокация / перевод с английского под редакцией Кобзарева Ю.Б./М.: Сов. Радио, 1969
3. Ultra-wideband radar technology // edited by James D. Taylor / CRC Press LLC, N.W. Corporate Blvd., Boca Raton, Florida 2000.
4. Муравьев В.В., Кореневский С.А., Костюкович К.А., Стануль А.А. Синтезатор широкополосных сигналов, сформированных методом прямого цифрового синтеза. / Приборы и методы измерений, №2(7), 2013
5. В.И. Кошелев, В.Т. Сарычев, С.Э. Шипилов, В.П. Якубов. Оценивание информационных характеристик радиолокационных объектов при сверхширокополосном зондировании / «Журнал радиоэлектроники», № 6 (2001)
6. David K. Barton. Radar Equations for Modern Radar / Boston, London, Artech house. 2013
7. Evgeny G. Zhilyakov. Generalized sub band analysis and signal synthesis // Evgeny G. Zhilyakov, Sergei P. Belov, Ivan I. Oleinik, Sergei L. Babarinov, Diana I. Trubitsyna / Bulletin of Electrical Engineering and Informatics Vol. 9, No. 1, February 2020
8. Ronald L. Allen, Duncan W. Mills. Signal analysis. Time, frequency, scale, and structure / Ieee Press. Wiley-interscience. A John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2004.
9. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967
11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ М.: Мир, 1989
12. Жиляков Е. Г Оптимальные субполосные методы анализа и синтеза сигналов конечной длительности / Автоматика и телемеханика, 2015, № 4; Autom. Remote Control, 76:4 (2015)
13. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Советское радио, 1966